[3.1]

$dx/dt=(r-ay)x$ (3.1a)

$dy/dt=(bx-c)y$ (3.1b)

平衡点を(x_0,y_0) ;$(x_0,y_0>0)$とすると、

$dx/dt=(r-ay_0)x_0$ (3.1'a)

$dy/dt=(bx_0-c)y_0$ (3.1'b)

$x_0,y_0>0$ より、$x_0=c/b$, $y_0=r/a$。

平衡点からのずれ$(n_1,n_2)=(x-x_0,y-y_0)$を用いて、$(x,y)=(x_0+n_1, y_0+n_2)$によって、(3.1a)式は

$$d(x_0+n_1)=\{r-a(y_0+n_2)\}(x_0+n_1)$$

$$dn_1/dt=rx_0+rn_1-a(y_0+n_2)x_0-an(y_0+n_2)$$

$$dn_1/dt=-ax_0n_2-an_1n_2$$

(3.1b)式は

$$d(y_0+n_2)=\{b(x_0+n_1)-c\}(y_0+n_2)$$

$$dn_2/dt=b(x_0+n_1)(y_0+n_2)-c(y_0+n_2)$$

$$dn_2/dt=by_0n_1+n_1n_2$$

ここで、n_1,n_2は十分に小さいので二次の項は無視できる。

$$\begin{cases} dn_1/dt=0\cdot n_1-ax_0\cdot n_2 \\ dn_2/dt=by_0\cdot n_1+0\cdot n_2 \end{cases}$$

従って、$M=\begin{pmatrix} 0 & -ax_0 \\ by_0 & 0 \end{pmatrix}, n=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ と書くと、上式は dn/dt=Mn と書ける。

このときの固有値λは、$\lambda^2-(0+0)\lambda+\{0\cdot 0-(-ax_0\cdot by_0)\}=0$ を満たすので、

$$\lambda=\pm\sqrt{-bx_0\cdot ay_0}=\pm\sqrt{-cr}$$

となり、λは純虚数となる。また、(2.10)式と(2.12)式より上で求めたλを$\lambda=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$に当てはめると、

$$\lambda=0\pm\sqrt{cr}\cdot\sqrt{-1}$$

このとき、周期は$T=2\pi/|\beta|$ なので、$T=2\pi/\sqrt{rc}$ となる。

[3.2]

§3.6 を参照のこと。

K が無限大なので、

$dx/dt=rx-axy/(1+hx)$ (3.3'a)

$dy/dt=bxy/(1+hx)-cy$ (3.3'b)

V(x,y)を時間微分して、

$$dV(x,y)/dt = \partial V(x,y)/\partial x + \partial V(x,y)/\partial y$$
$$= \{(b-ch) - c/x\} \cdot dx/dt + \left\{a - \frac{br}{(b-ch)y}\right\} \cdot dy/dt$$

(3.3')式を代入して整理すると、

$$dV(x,y)/dt = \frac{hr\{(b-ch)x - c\}^2}{(b-ch)(1+hx)}$$

r,h,b-ch>0 なので、dV/dt≧0。

[3.3]

(3.3)式

$$dx/dt = rx(1 - /K) - axy/(1+hx) \qquad (3.3a)$$
$$dy/dt = bxy/(1+hx) - cy \qquad (3.3b)$$

ただし、b-ch>0.

(1) 求める平衡点の座標を(x,y)= (x_0,y_0) ;(x_0,y_0>0)とおくと、

$$rx_0(1 - x_0/K) - ax_0y_0/(1+hx_0) \qquad \cdots①$$
$$bx_0y_0/(1+hx_0) - cy_0 \qquad \cdots②$$

②式より $y_0 \neq 0$ なので x_0 について整理して、x_0=c/(b-ch)

①式より $x_0 \neq 0$ なので y_0 について整理して、y_0=(r/a)(1- x_0/K)(1+h x_0)

(2) 演習 3.1 を参照。

平衡点からのずれ(n_1,n_2)=(x-x_0,y-y_0)を用いて、(x,y)=(x_0+n_1, y_0+n_2)によって、(3.3)式は

$$d(x_0 + n_1) = \cdots$$
$$dn_1/dt = \cdots$$

(3.1b)式は

$$d(y_0 + n_2) = \cdots$$
$$dn_2/dt = \cdots$$

ここで、n_1,n_2 は十分に小さいので二次の項は無視でき、

$$\begin{cases} dn_1/dt = \cdots \\ dn_2/dt = \cdots \end{cases}$$

従って、$n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ と書くと、上式は dn/dt=Mn と書けるので、平衡点(x,y)=(x_0,y_0)における線形化力学系の

行列の要素は $M = \begin{pmatrix} \partial(dx/dt)/\partial x & \partial(dx/dt)/\partial y \\ \partial(dy/dt)/\partial x & \partial(dy/dt)/\partial y \end{pmatrix}$ となる

(3) 固有値λが従う方程式は

$$\lambda^2-\left(\frac{\partial(dx/dt)}{\partial x}+\frac{\partial(dy/dt)}{\partial y}\right)\lambda+\left\{\frac{\partial(dx/dt)}{\partial x}\cdot\frac{\partial(dy/dt)}{\partial y}+\frac{\partial(dx/dt)}{\partial y}\cdot\frac{\partial(dy/dt)}{\partial x}\right\}=0$$

$$\Rightarrow\lambda^2-\left(\frac{rhx_0(K-1/h-2x_0)}{K(1+hx_0)}\right)\lambda+\frac{abx_0y_0}{(1+hx_0)^3}$$

λが複素数根を持つとき、$\lambda=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$なので(→2.13 式を参照)、λの実部αは$\alpha=\dfrac{rhx_0(K-1/h-2x_0)}{K(1+hx_0)}$

と表せる。

r,h,x_0,K>0 なので、αの正負の判別は$(K-1/h-2x_0)$で行えばよい。つまり平衡点は、

$x_0>(K-1/h)/2$ ならα<0 なので安定。 …(＊)

$x_0<(K-1/h)/2$ ならα>0 なので不安定。 …(＊＊)

となる。

(4) dx/dt=0 のアイソクラインは $y=(r/a)(1-x/K)(1+hx)$ なので x について整理して、

$$y=-\frac{hr}{ak}\left\{x^2-\left(K-\frac{1}{h}\right)x+\frac{K}{h}\right\}$$

となり、上に凸の放物線である。このとき、この放物線の頂点の x 座標は$\bar{x}=(K-1/h)/2$ となる。

一方、dy/dt=0 のアイソクラインは $x=c/(b-hc)$。この 2 本のアイソクラインの交点が共存平衡点である。よって、平衡点が dx/dt=0 のアイソクラインの頂点より左(つまり、$\bar{x}>x_0$)にあるとき、$x_0<(K-1/h)/2$。これは(3)の安定性の解析(＊＊)と同義で、平衡点は不安定となる。

逆に平衡点が dx/dt=0 のアイソクラインの頂点より右にある場合は(3)の安定性の解析(＊)と同義で、平衡点は安定となる。

[3.3]

ロトカ･ボルテラ競争系の(2.1)式では、原点でない平衡点(x_0,y_0)は、$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(K_1-aK_2)/(1-ab)\\(K_2-bK_1)/(1-ab)\end{pmatrix}$で、この($x_0$,$y_0$)を用いて(2.1)式を変形すると、

$dx/dt=(-r_1/K_1)x[(x-x_0)+a(y-y_0)]$ …(2.1'a)

$dy/dt=(-r_2/K_2)y[b(x-x_0)+(y-y_0)]$ …(2.1'b)

与えられた V(x,y)を時間微分して、

$$dV/dt=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$=\{(2/a)(x-x_0)+2(y-y_0)\}\cdot\frac{dx}{dt}+\{(2/b)(y-y_0)+2(x-x_0)\}\cdot\frac{dy}{dt}$$

(2.1')式をそれぞれ代入して整理すると、

$$dV/dt = (2/a)\{(x-x_0)+a(y-y_0)\}\cdot\left(\frac{-r_1x}{K_1}\right)\{(x-x_0)+a(y-y_0)\}$$

$$+(2/b)\{(y-y_0)+b(x-x_0)\}\cdot\left(\frac{-r_2y}{K_2}\right)\{b(x-x_0)+(y-y_0)\}$$

$$= -\left[\frac{r_1x}{aK_1}\{(x-x_0)+a(y-y_0)\}^2+\frac{r_2y}{bK_2}\{b(x-x_0)+(y-y_0)\}^2\right]$$

a,b,r,K,x,y>0 なので、dV/dt≦0。ただし等号の成立は(x,y)= (x_0,y_0)のとき。