「数理生物学入門」(巌佐庸) 七章 演習答案

[7.1]

(7.2)式を(7.1)式に代入する。

まず、(7.1)式の左辺について、

$$
\begin{aligned}
\partial n/\partial t &= \partial n(x,t)/\partial t \\
&= \partial\left\{\left(N/\sqrt{4\pi Dt}\right)\exp\left[-x^2/4Dt\right]\right\}/\partial t \\
&= N/\sqrt{4\pi Dt}\left(-1/2t + x^2/4Dt^2\right)\exp\left[-x^2/4Dt\right]
\end{aligned}
$$

次に、(7.1)式の右辺について、

$$
\begin{aligned}
D\,\partial^2 n/\partial x^2 &= D\,\partial^2 n(x,t)/\partial x^2 \\
&= D\,\partial\left(N\Big/\sqrt{4\pi Dt}\cdot\frac{-2x}{4Dt}\exp\left[-x^2/4Dt\right]\right)\Big/\partial x \\
&= DN/\sqrt{4\pi Dt}\left(\frac{-2}{4Dt}+\frac{x^2}{4Dt}\right)\exp\left[-x^2/4Dt\right] \\
&= N/\sqrt{4\pi Dt}\left(-1/2t + x^2/4Dt^2\right)\exp\left[-x^2/4Dt\right]
\end{aligned}
$$

よって、(7.2)式は $\partial n/\partial t = D\,\partial^2 n(x,t)/\partial x^2$ を満たす解である。

このとき、$\sigma = \sqrt{2Dt}, \mu = 0$ とおくと、

$$
n(x,t) = \left(N/\sqrt{4\pi Dt}\right)\exp\left[-x^2/4Dt\right] = N\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)
$$

これは、母集団(面積)が N、平均が 0、分散が $\sqrt{2Dt}$ である正規分布である。

[7.2]

（1）

(7.3)式を満たす $n(x,t)$ を考えて $m(x,t) = n(x,t)e^{-rt}$ とし、これを(7.1)式に代入して $\partial m/\partial t = D\,\partial^2 m/\partial x^2$ であることを示す。まず左辺について、

$$
\begin{aligned}
\partial m/\partial t &= \partial\left(n(x,t)e^{-rt}\right)/\partial t \\
&= \partial n(x,t)/\partial t\cdot e^{-rt} + n(x,t)\cdot\partial e^{-rt}/\partial t \\
&= \left(D\,\partial^2 n/\partial x^2 + rn\right)e^{-rt} - rne^{-rt} \\
&= D\,\partial^2 n/\partial x^2\, e^{-rt}
\end{aligned}
$$

次に右辺について、

$$
\begin{aligned}
D\,\partial^2 m/\partial x^2 &= D\,\partial\left(D\,\partial n(x,t)e^{-rt}/\partial x\right)/\partial x \\
&= D\,\partial^2 n/\partial x^2\, e^{-rt}
\end{aligned}
$$

よって $m(x,t) = n(x,t)e^{-rt}$ は(7.1)式を満たす。

（2）
$m(x,t)$が(7.2)式で与えられるとき、

$$\begin{aligned} n(x,t) &= m(x,t)e^{rt} \\ &= \left(N/\sqrt{4\pi Dt}\right)\exp\left[-x^2/4Dt\right]e^{rt} \\ &= \left(N/\sqrt{4\pi Dt}\right)\exp\left[-x^2/4Dt + rt\right] \end{aligned}$$

[7.3]
$n(\hat{x}(t),t) = c$ となるとき、

$$\left(N/\sqrt{4\pi Dt}\right)\exp\left[-\hat{x}(t)^2/4Dt + rt\right] = c$$

$$-\hat{x}(t)^2/4Dt + rt = \ln\left(\frac{c\sqrt{4\pi Dt}}{N}\right)$$

$$-\hat{x}(t)^2/t^2 = 4rD - \frac{4D\cdot\ln\left(c\sqrt{4\pi Dt}/N\right)}{t}$$

ここで、$t\to\infty$ で $\dfrac{4D\cdot\ln\left(c\sqrt{4\pi Dt}/N\right)}{t} = 0$ であるので、$\hat{x}(t)/t = 2\sqrt{rD} + \left[t\to\infty \text{で0になる項}\right]$
つまり、侵入生物の伝播速度は時間とともにある一定の速度に近づき、かつ伝播速度は成長率と拡散速度に依存する。

[7.4]
(7.7)式が(7.3)式と(7.6)式をともに満たすことを示す。
まず(7.3)式について(7.7)式は、

$$\partial n/\partial t = N\sin(\pi x/L)\left(r - \pi^2 D/L^2\right)\exp\left[\left(r - \pi^2 D/L^2\right)t\right]$$

$$\begin{aligned} D\partial^2 n/\partial x^2 + rn &= D\left[\partial^2 \sin(\pi x/L)/\partial x^2\right]\exp\left[\left(r - \pi^2 D/L^2\right)t\right] + rn \\ &= -\pi^2 D/L^2 \cdot N\sin(\pi x/L)\exp\left[\left(r - \pi^2 D/L^2\right)t\right] + r\cdot N\sin(\pi x/L)\exp\left[\left(r - \pi^2 D/L^2\right)t\right] \\ &= N\sin(\pi x/L)\left(r - \pi^2 D/L^2\right)\exp\left[\left(r - \pi^2 D/L^2\right)t\right] \end{aligned}$$

よって $\partial n/\partial t = D\partial^2 n/\partial x^2 + rn$ であり、(7.7)式は(7.3)式をみたす。
次に(7.6)式について(7.7)式は、

$$\begin{aligned} n(0,t) &= N\sin(0)\exp\left[\left(r - \pi^2 D/L^2\right)t\right] = 0 \\ n(L,t) &= N\sin(\pi)\exp\left[\left(r - \pi^2 D/L^2\right)t\right] = 0 \end{aligned}$$

すなわち(7.7)式は(7.6)式をみたす。

[7.5]

$n(x) = \left(x^2 - 7a^2\right)^2/56\beta = \left(x + \sqrt{7}a\right)^2\left(x - \sqrt{7}a\right)^2/56\beta$ と変形できることを利用すると簡便である。

(7.11)式を(7.10)式の右辺に代入して、

$$
\begin{aligned}
&\partial^2(\beta n \cdot n)/\partial x^2 + (a^2 - x^2)n(x) \\
&= \frac{\partial^2\left\{\left(x+\sqrt{7}a\right)^4\left(x-\sqrt{7}a\right)^4\right\}/\partial x^2}{56^2\beta} + (a^2 - x^2)n(x) \\
&= \frac{n(x)\left\{24\left(x^2+7a^2\right)+32\left(x^2-7a^2\right)\right\}}{56} + (a^2 - x^2)n(x) \\
&= 0
\end{aligned}
$$